№9-дәріс

Туынды ұғымға әкелетін механиканың міндеттері. Функцияның туындысы, оның геометриялық және механикалық мағынасы. Қисыққа тангенс және қалыпты теңдеулер. Саралау ережелері. Күрделі функцияның туындысы.

Бір айнымалы функцияның туындысы.

x_0 маңайында, x_0 нүктесін қоса алғанда, $y = f(x)$ функциясы берілсін. x_0 нүктесінде x аргументіне Δx өсімшесін береміз (оң немесе теріс). Онда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ шегі табылса, онда оны x_0 нүктесіндегі $y = f(x)$ функциясының туындысы деп айтамыз, немесе $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады деп айтамыз және былай белгілейміз: y' $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, яғни,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Егер (1)-де $\Delta x \to 0$ және $\Delta x > 0$ $[\Delta x < 0]$ болса, онда (1)-ді x_0 нүктесіндегі $f'_{пр}(x_0)$ оң жақ туындысы [$f'_{л}(x_0)$ сол жақ туындысы] деп атаймыз. Егер $\exists f'_{пр}(x_0), f'_{л}(x_0)$ және $f'_{пр} = f'_{л}$ болса, онда $\exists f'(x_0)$.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын $[a;b]$ кесіндісінде дифференциалданады деп айтамыз, егер оның $(a;b)$ аралығындағы әрбір нүктеде туындысы бар болса, ал a және b ұштарында сәйкесінше $f'_{пр}(a)$ және $f'_{л}(b)$ табылса.

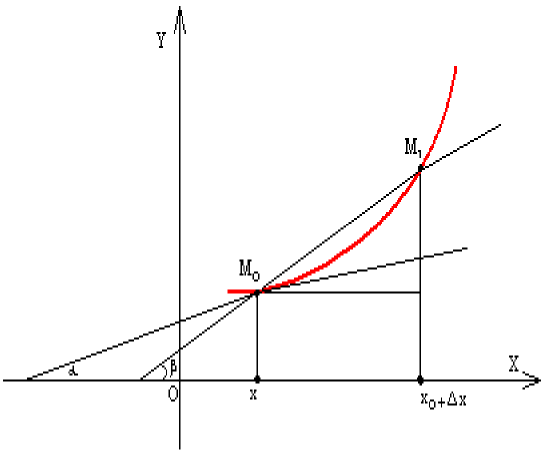
D облысында дифференциалданатын функциялардың класын $C^1(D)$ деп белгілейміз.

Туындының механикалық және геометриялық мағынасы

а) **Механикалық.** $S = S(t)$ - M нүктесінің қозғалу заңы болсын. M нүктесінің t-дан $t + \Delta t$-ға дейінгі аралығындағы қозғалысын қарастыралық. Онда $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, ал $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - орташа жылдамдық . Егер

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$$

шегі табылса, онда жолдың уақыт бойынша туындысы M нүктесінің t уақыт аралығындағы қозғалысының жылдамдығына тең.



б) **Геометриялық.** $y = f(x)$ қисығында $M_0[x_0; f(x_0)]$ және $M_1[x_0 + \Delta x; f(x_0)]$ нүктелерін қарастыралық. $M_0A = \Delta x$, $AM_1 = \Delta y$ және $tg\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ екендігі анық. M_1 нүктесін қисықтың бойымен M_0 нүктесіне қарай жылжытамыз. M_1 нүктесінің орналасу аралығын белгілей отырып, $\{M_0M_1\}$ қимасын аламыз. Онда $M_1 \to M_0$ болған жағдайда $\Delta x \to 0$ болатыны анық.

Анықтама. M_1 нүктесі қисықтың бойымен M_0 нүктесіне кез келген жағынан шексіз жақындағанда M_0M_1 қимасының M_0T шектелген орны табылса, онда M_0T $y = f(x)$ қисығына x_0 нүктесінде жүргізілген жанама деп аталады.

Е гер қисықтың жанамасы бар болса, онда

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Бұдан, x_0 нүктесінде дифференциалданатын функцияның осы нүктеде бұрыштық коэффиценті $k = f'(x_0)$ болатын жанамасы бар болады.

Мысал 1. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі жанамасының теңдеуін жаз.

а) $y = x^2$, $x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 1$. $k = f'(1)$ болғандықтан, жанаманың теңдеуі $y - 1 = f'(1)(x-1)$. $f'(x)$-ті табалық:

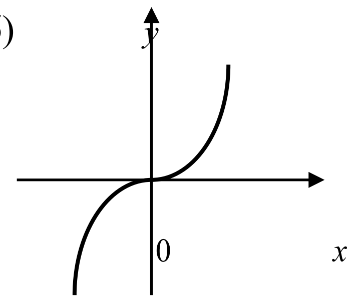
$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

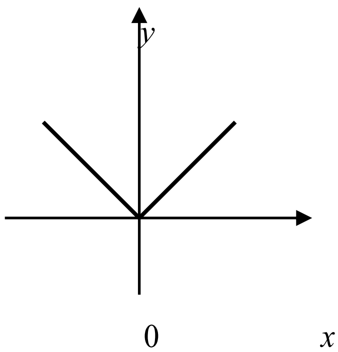
б) $y = x^3$, $x_0 = 0 \Rightarrow y(0) = 0$. $(x^3)' = 3x^2$ болғандықтан, $k = 0$ және жанаманың теңдеуі $y = 0$.

в) $y = |x|$, $x_0 = 0$.

б)



в)



Оң жақ жанамасы $y = x$ болады, яғни $f'_{пр} = 1$, ал сол жағынан жанамасы $y = -x$, яғни $f'_{л} = -1$. Бұдан, x=0 нүктесінде берілген $y = |x|$

функцияның туындысы табылмайды, бұл функция x=0 нүктесінде үзіліссіз болғанның өзінде.

$f'_{пр} \neq f'_{л}$ болатын нүктелер бұрыштық деп аталады.

Теоремалар.

1. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда бұл функция осы нүктеде үзіліссіз.

Шынымен де, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, мұндағы $\alpha(x) \to 0$, егер $\Delta x \to 0$.

Бұдан, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \to 0$ егер $\Delta x \to 0$.

Дифференциалдау ережелері

1. $u'(x)$ және $v'(x)$ табылсын, ал C - const. Онда

а) $C' = 0$. Шынында да, $f(x) = C \Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow C' = 0$.

б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

в) $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow (Cu)' = Cu'$.

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Туындының кестесі

$u = u(x)$, $v = v(x)$ - x айнымалысына тәуелді функциялар, ал C, a, α - тұрақты сандар болсын. Онда

1. $x_x' = 1$
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$
3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
5. $(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
6. $(ctg\ u)' = \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
7. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
8. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
9. $(arctg\ u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
10. $(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
11. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$
12. $(\log u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \Rightarrow (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
13. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$

3-формуланың дәлелдеуін келтірелік.

Мысал 2. Берілген функциялардың туындыларын тап

а) $y = x^3$. 2-формуладан $u(x) = x$, $\alpha = 3 \Rightarrow y' = 3x^{3-1} \cdot x' = 3x^2$.

б) $y=\sqrt[3]{x^2}$. $y=x^{2/3}$ .2-формуладан

$$u(x)=x,\ \alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\cdot x'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

в) $y=\dfrac{1}{x^2}$. $y=x^{-2}$. 2-формуладан

$$u(x)=x,\ \alpha=-2\Rightarrow y'=-2x^{-2-1}\cdot x'=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}.$$

г) $y=2^{x^3}$.

$$a=2,\ u=x^3,\Rightarrow y'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot\left(x^3\right)'=2^{x^3}\cdot\ln 2\cdot 3x^2=2^{x^3}\cdot 3x^2\ln 2.$$

д) $y=\sin^2 x^3=\left[\sin x^3\right]^2$.

$$u=\sin x^3,\ \alpha=2\Rightarrow y'=2\left(\sin x^3\right)^{2-1}\cdot\left(\sin x^3\right)'\Rightarrow$$

$$u=x^3\Rightarrow 2\sin x^3\cdot\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\sin 2x^3.$$

е)

$$y=\cos x\cdot\left(1+x^2\right)\Rightarrow y'=\left(\cos x\right)'\cdot\left(1+x^2\right)+\cos x\cdot\left(1+x^2\right)'=-\sin x\cdot\left(1+x^2\right)+\cos x\cdot\left[1'+\left(x^2\right)'\right]=$$

$$=-\sin x\cdot\left(1+x^2\right)+2x\cos x.$$

Күрделі функцияның туындысы.

Егер $t=\varphi(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, ал $y=f(t)$ функциясының $t_0=\varphi(x_0)$ нүктесінде туындысы бар болса, онда $y=f[\varphi(x)]$ күрделі функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар және

$$f'(\varphi(x))\big|_{x=x_0}=f_t'(t_0)\cdot\varphi'(x_0),\ \text{немесе}\ y_x'=y_t'\cdot t_x'.$$

$y=f[\varphi(x)]$ күрделі функциясының дифференциалын қарастырайық:

$$dy=y_x'\cdot dx$$

$y_x'=y_t'\cdot t_x'$ теңдігін және $t_x'\cdot dx=dt$ екендігін ескеріп,

$$dy=y_t'\cdot t_x'\cdot dx=y_t'\cdot dt$$

тәуелсіз айнымалыны басқа айнымалымен ауыстырсақ та, дифференциал түрінің өзгермейтін қасиетін *дифференциал түрінің инварианттығы* деп атайды.

Мысал 1 $y=\sin^2 x^3=\left[\sin x^3\right]^2$.

$$u=\sin x^3,\ \alpha=2\Rightarrow y'=2\left(\sin x^3\right)^{2-1}\cdot\left(\sin x^3\right)'\Rightarrow$$

$$u=x^3\Rightarrow 2\sin x^3\cdot\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\sin 2x^3.$$